J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 12, No. 2, 153-159, Januari 2016

ISBN:1858-1382

Beberapa Sifat Operator *Self Adjoint* dalam Ruang Hilbert

Firman[*]

Abstrak

Misalkan $T: H \longrightarrow H$ adalah operator linier dengan H adalah ruang Hilbert. Pada operator linier dikenal istilah operator Adjoint beserta sifat-sifatnya. Salah satu jenis operator adjoint adalah operator self adjoint. Berdasarkan sifat-sifat operator adjoint, maka dalam tulisan ini akan dibahas mengenai sifat-sifat operator self adjoint dalam ruang hilbert.

Kata Kunci: Ruang hasil kali dalam, ruang Hilbert, operator linier, operator Self Adjoint.

1. Pendahuluan

Pada bagian ini akan diberikan beberapa definisi, teorema, dan lemma yang akan digunakan untuk menjelaskan mengenai sifat operator *self adjoin* dalam ruang Hilbert.

Definisi 1.
Ruang metrik adalah pasangan (X, d), dimana X adalah suatu himpunan tak kosong dan d adalah metrik pada X, yaitu fungsi yang didefinisikan pada $X \times X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi:

a. $d(x, y) \geq 0$
b. $d(x, y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$
c. $d(x, y) = d(y, x)$
d. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definisi 2.
Misalkan (x_n) adalah barisan di ruang metrik $X = (X, d)$. Barisan (x_n) dalam ruang metrik $X = (X, d)$ dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N = N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, untuk semua $m, n > N$.
Ruang X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen ke x, dimana $x \in X$.

Definisi 3.
Misalkan X adalah ruang vektor atas lapangan F. Norm pada X adalah suatu fungsi bernilai real pada X yang dinotasikan dengan $\|x\|$ sehingga untuk semua $x, y \in X$ dan $\alpha \in F$ memenuhi sifat-sifat berikut:

a. $\|x\| \geq 0$,
b. $\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$,

[*] *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin*

c. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(ketaksamaan segitiga).*

Suatu ruang bernorm atas F adalah pasangan ($X, \|.\|$) dimana X adalah ruang vektor atas F dan $\|\cdot\|$ adalah norm pada X.

Definisi 4.

Misalkan X dan Y *adalah ruang vektor atas lapangan* F. *Misalkan* $T : X \longrightarrow Y$.
T *dikatakan operator linier jika memenuhi:*

a. $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$; untuk semua x_1, x_2

b. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$; untuk semua $x \in X$ dan $\alpha \in F$.

Definisi 5.

Misalkan X, Y *adalah ruang bernorm. Misalkan* $T: \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ *adalah operator linier, dengan* $D(T) \subset X$. *Operator* T *dikatakan terbatas jika terdapat* $c \in \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga* $\|Tx\| \leq c\|x\|$, *untuk semua* $x \in D(T)$.

Definisi 6.

Misalkan X *adalah ruang vektor atas lapangan* F. *Ruang hasil kali dalam adalah ruang vektor* X *bersama dengan hasil kali dalam yang terdefinisi di* X, *dimana, hasil kali dalam pada* X *adalah sebuah fungsi* $\langle\, , \rangle : X \times X \rightarrow F$, *sedemikian sehingga memenuhi aksioma berikut:*

a. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$; $untuk\ semua\ x, y, z \in X$

b. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$; $untuk\ semua\ x, y \in X\ dan\ \alpha \in F$.

c. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$; $untuk\ semua\ x, y \in X$.

d. $\langle x, x\rangle \geq 0$, $dan\ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$; $untuk\ semua\ x \in X$.

Hasil kali dalam pada X didefinisikan sebagai norm pada X dengan $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Ruang hasil kali dalam yang lengkap disebut dengan *ruang Hilbert*.

Contoh 1.

Misalkan R^n adalah himpunan bilangan real berdimensi n. Ruang vektor R^n dengan hasil kali dalam didefinisikan sebagai $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, dimana $x = (x_j) = (x_1, \cdots, x_n)$ dan $y = (y_j) = (\llcorner_1, \cdots, y_n)$ adalah suatu ruang hasil kali dalam lengkap.

Definisi 7. (Kreyszig, 1978)

Misalkan T: $H_1 \rightarrow H_2$ *adalah operator linier terbatas, dimana* H_1 *dan* H_2 *ruang Hilbert, maka operator Adjoint Hilbert dari* T *yang disimbolkan dengan* T^* *adalah operator* $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $x \in H_1$ dan $y \in H_2$,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

Teorema 1.

Misalkan $T: H \longrightarrow H$ *adalah operator linier, dan* T^* *adalah operator adjoint Hilbert dari* T, *maka* T^* *ada, tunggal dan merupakan operator linier terbatas dengan* $\|T^*\| = \|T\|$.

Lemma 1.

Misalkan X *dan* Y *ruang hasil kali dalam dan* $Q: X \longrightarrow Y$ *operator linier terbatas. Maka* $Q = 0$ *jika dan hanya jika* $\langle Qx, y\rangle = 0$ *untuk semua* $x \in X$ dan $y \in Y$.

Teorema 2.

Misalkan H_1, H_2 adalah ruang Hilbert, dengan $S: H_1 \to H_2$ dan $T: H_1 \to H_2$ operator linier terbatas, dan α sebarang scalar, maka

a. $\langle T^* y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \qquad (x \in H_1,\ y \in H_2)$

b. $\langle S + T\rangle^* = S^* + T^*$

c. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}\, T^*$

d. $(T^*)^* = T$

e. $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

f. $T^*T = 0 \iff T = 0$

g. $(ST)^* = T^*S^*$ *(dengan asumsi $H_2 = H_1$).*

2. Beberapa Sifat Operator *Self Adjoint* dalam Ruang Hilbert

Definisi 8.
Misalkan $T: H \to H$ adalah operator linier terbatas pada ruang Hilbert H.
T dikatakan Self-adjoint jika $T^* = T$.

Berdasarkan definisi operator adjoint dalam ruang Hilbert, berlaku $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ untuk semua $x, y \in H$**.** Karena $T = T^*$, maka untuk semua $x, y \in H$ berlaku $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$. Dalam hal H adalah suatu ruang Hilbert atas lapangan kompleks, operator linier $T: H \to H$ yang self adjoint disebut juga operator hermitian.

Sifat 1.
Misalkan $T: H \to H$ adalah operator linier pada ruang Hilbert H. Jika T adalah self-adjoint, maka $\langle Tx, x\rangle$ adalah real untuk setiap $x \epsilon H$.

Bukti:
Jika T adalah self-adjoint, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\langle Tx, x\rangle &= \langle x, Tx\rangle \\ &= \overline{\langle Tx, x\rangle}\end{aligned}$$

Karena $\langle Tx, x\rangle$ sama dengan kompleks konjugatnya, maka $\langle Tx, x\rangle$ bernilai real untuk setiap $x \epsilon H$. □

Sifat 2.
Misalkan $T: H \to H$ adalah operator linier pada ruang Hilbert. Jika H adalah ruang Hilbert atas lapangan kompleks dan $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ untuk setiap $x \epsilon H$, maka operator T adalah self-adjoint.

Bukti:
Jika $\langle Tx, x\rangle$ adalah real untuk setiap x, maka

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \overline{\langle x, T^* x\rangle} = \langle T^* x, x\rangle$$

karena itu, $\langle Tx, x\rangle - \langle T^* x, x\rangle = 0$ atau $\langle (T - T^*)x, x\rangle = 0$.
Klaim:
Jika $T: H \to H$, dimana H adalah ruang Hilbert atas lapangan kompleks dan $\langle Tx, x\rangle = 0$ untuk setiap $x \in H$, maka $T = 0$.
Bukti klaim:
Misalkan $v = \alpha x + y \in H$, dan berdasarkan asumsi $\langle Qv, v\rangle = 0$, maka

$$\begin{aligned}0 &= \langle Q(\alpha x + y), (\alpha x + y)\rangle \\ &= \langle Q(\alpha x + y), \alpha x\rangle + \langle Q(\alpha x + y), y\rangle\end{aligned}$$

$$= \langle Q\alpha x, \alpha x\rangle + \langle Qy, \alpha x\rangle + \langle Q\alpha x, y\rangle + \langle Qy, y\rangle$$
$$= \alpha\bar{\alpha}\langle Qx, x\rangle + \bar{\alpha}\langle Qy, x\rangle + \alpha\langle Qx, y\rangle + \langle Qy, y\rangle$$
$$= \alpha\langle Qx, y\rangle + \bar{\alpha}\langle Qy, x\rangle.$$

Jika $\alpha = 1$, maka $\langle Qx, y\rangle + \langle Qy, x\rangle = 0$.
Jika $\alpha = i$ maka $\bar{\alpha} = -i$, dan $\langle Qx, y\rangle - \langle Qy, x\rangle = 0$.
Dengan menjumlahkan kedua persamaan di atas, diperoleh $\langle Qx, y\rangle = 0$ yang mengakibatkan $Q = 0$.
Berdasarkan bukti klaim, maka $T - T^* = 0$ sehingga$\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$. Jadi operator T adalah self adjoint. □

Sifat 3.
Misalkan $S: H \to H$ dan *$T: H \to H$ adalah dua operator linier self adjoint pada ruang Hilbert H. Hasil kali kedua operator tersebut adalah self adjoint jika dan hanya jika operator komutatif, $ST = TS$.*

Bukti:
Misalkan S dan T adalah operator self adjoint, maka $S = S^*$ dan $T = T^*$. Jika hasil kali kedua operator adalah self adjoint, maka

$$ST = (ST)^* = T^*S^* = TS.$$

Jadi operator self adjoint komutatif terhadap perkalian. Jika perkalian dua operator adalah komutatif, maka

$$ST = TS = ((TS)^*)^* = (S^*T^*)^* = (ST)^*.$$

Jadi jika dua operator komutatif terhadap perkalian, maka hasil kali dua operator tersebut adalah self adjoint. □

Sifat 4.
Jika $\mathrm{S}: \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$ *dan* $\mathrm{T}: \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$ *adalah operator linier self adjoint pada ruang Hilbert, maka $S + T$ adalah self adjoint.*

Bukti:
Karena S dan T self adjoint, maka $S = S^*$ dan $T = T^*$. Misalkan $x, y \in H$, maka

$$\langle (S+T)x, y\rangle = \langle x, (S+T)^*y\rangle = \langle x, (S^* + T^*)y\rangle = \langle x, (S + T)y\rangle.$$

Jadi $S + T$ adalah self adjoint. □

Sifat 5.
Jika $T: H \longrightarrow H$ adalah operator linier self adjoint, maka αT adalah self adjoint, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bukti:
Karena T self adjoint, maka $T = T^*$. Misalkan $x, y \in H$, maka

$$\langle (\alpha T)x, y\rangle = \langle x, (\alpha T)^*y\rangle = \langle x, (\bar{\alpha}T^*)y\rangle = \langle x, (\alpha T)y\rangle.$$

Jadi αT adalah self adjoint. □

Akibat 1.
Misalkan $S : H \longrightarrow H$ dan $T : H \longrightarrow H$ *adalah operator linier self adjoint terbatas pada ruang Hilbert. Jika* α, β *adalah real, maka* $\alpha S + \beta T$ *adalah self adjoint.*

Bukti:
Misalkan S dan T adalah operator self adjoint maka $S = S^*$ dan $T = T^*$.
Berdasarkan Sifat 5 αS dan βT adalah self adjoint, untuk setiap $\alpha, \beta \in R$, dan dari Sifat 4 maka diperoleh $\alpha S + \beta T$ juga self adjoint. □

Sifat 6.
Misalkan $T: H \longrightarrow H$ *dan* $W: H \longrightarrow$ 가 *adalah operator linier terbatas pada ruang Hilbert. Jika* T *self adjoint, maka* $S = W^*TW$ *adalah self adjoint.*

Bukti:
Karena T self adjoint, maka $T = T^*$. Misalkan $x, y \in H$.
Akan ditunjukkan bahwa $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ dimana $= W^*TW$.
Perhatikan bahwa

$$\langle Sx, y \rangle = \langle W^*TWx, y \rangle = \langle TWx, Wy \rangle = \langle x, W^*TWy \rangle = \langle x, Sy \rangle.$$

Jadi $S = W^*TW$ adalah self adjoint. □

Sifat 7.
Jika T_n *adalah barisan operator self adjoint yang konvergen ke operator* T, *maka* T *merupakan operator self adjoint.*

Bukti:
T_n merupakan barisan operator self adjoint yang konvergen ke operator T yang mengakibatkan $T_n = T_n{}^*$ dan

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Perhatikan

$$\begin{aligned}
\|T - T^*\| &= \|T - T_n + T_n - T_n{}^* + T_n{}^* - \square^*\| \\
&\leq \|T - T_n\| + \|T_n - T_n{}^*\| + \|T_n{}^* - T^*\| \\
&= \|T - T_n\| + 0 + \|(T_n - T)^*\| \\
&= \|T - T_n\| + 0 + \|T_n - T\| \\
&= 2\|T_n - T\|.
\end{aligned}$$

Karena $\|T_n - T\|$ konvergen ke-0, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $\|T_n - T\| < {}^{\varepsilon}/_{2}$.
Jadi $\|T - T^*\| < \varepsilon$, untuk semua $\varepsilon > 0$. Akibatnya $\|T - T^*\| = 0$ atau $T = T^*$. □

Sifat 8.
Misalkan $T: H \to H$ *operator linier self adjoint pada ruang Hilbert, maka semua nilai eigen dari* T *(jika ada) adalah real.*

Bukti:
Misal T adalah sebuah operator self adjoint pada H. Misalkan λ sebarang nilai eigen dari T dan x vektor tidak nol dalam H sehingga $Tx = \lambda x$. Maka $\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle$.

Karena $x \neq 0$, maka $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 \neq 0$ dan jika kedua ruas dibagi dengan $\langle x, x\rangle$ mengakibatkan $\lambda = \bar{\lambda}$. Sebab itu λ adalah real. □

Akibat 2.
Misalkan $T: H \to H$ operator linier self adjoint pada ruang Hilbert, dengan $dim(H) = n$, maka T mempunyai n nilai eigen real.

Bukti:
Polinom karakteristik $det(\lambda I - A)$ berderajat n, jadi mempunyai n akar kompleks. Masing-masing akar ini adalah nilai eigen dari operator yang self adjoint, dan menurut Sifat 8 masing-masing nilai eigen ini adalah bilangan real. Jadi T memiliki n nilai eigen real. □

Contoh 2.
Misalkan $T: C^2 \to C^2$ dengan $Tx = Ax$, dimana $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$ hermitian.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1-i \\ i-1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda-3) - (-1-i)(i-1) \\ &= (\lambda^2 - 5\lambda + 6) - (2) \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \\ &= (\lambda-4)(\lambda-1). \end{aligned}$$

Nilai eigen dari A yakni solusi dari polinom det $(\lambda I - A) = 0$, yaitu $\lambda = 4$ dan $\lambda = 1$. Jadi T memiliki 2 nilai eigen real.

3. Kesimpulan

Berikut kesimpulan yang diperoleh dari hasil kajian ini, yaitu T operator self-adjoint pada ruang Hilbert kompleks jika dan hanya jika $\langle Tx, x\rangle$ adalah real untuk setiap $x \epsilon H$. Hasil kali dua operator yang self adjoint adalah self adjoint jika dan hanya jika bersifat komutatif. Semua nilai eigen dari operator self adjoint adalah real, dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda adalah ortogonal.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. & Chris, R., *Elementary Linear Algebra*, Edisi 7. Drexel University. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto.

[2] Bierens, H. J., 2007, *Introduction to Hilbert Spaces*, Pennsylvania State University.

[3] Brown, A.L and Page, A., 1970, *Elements of Functional Analysis*, London: Van Nostrand reinhold Company.

[4] Green, W.L., 2008, *Spectral Theory with an Introduction to Operator Means.*

[5] Green, W.L. and Andrew, A.D., 2002, *Spectral Theory of Operators on Hilbert Space*, Atlanta: School of Mathematics Georgia Institute of Technology.

[6] Kreyszig, E., 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York: John Wiley & Sons, Inc.

[7] Landsman, N.P., 2004, *Lecture Notes on Hilbert Spaces and Quantum Mechanics*, Department of Mathematics Radboud University Nijmegen.

[8] Siregar, R., 2002, *Proyeksi Orthogonal Pada Ruang Hilbert*, Fakultas Mipa Universitas Sumatera Utara Press